

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Porovnání Newtonovy a Gaussovy numerické integrace

Comparison of Newton and Gauss quadrature

Zadání bakalářské práce

Student: **Lukáš Pazderka**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: **Porovnání Newtonovy a Gaussovy numerické integrace**
Comparison of Newton and Gauss quadrature

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Metody numerické integrace jsou založeny na nahrazení integrandu jeho polynomiální interpolací. Pro hladké funkce závisí efektivita metody pouze na volbě interpolačních tj. kvadrturních uzlů, jejichž počet nazýváme řádem kvadratury. Newtonova kvadratura volí uzly ekvidistantně. Je však numericky nestabilní, proto se typicky používá jen do řádu 3 (Simpsonovo pravidlo). Pro dosažení konvergence se používá složená Newtonova kvadratura. Metoda konverguje algebraicky, řád je dán stupněm interpolantu. Gaussova kvadratura volí body tak, aby byl výpočet numericky stabilní, a proto je možné ji používat přímo. Metoda konverguje exponenciálně. Cílem této práce bude

- naprogramovat obě metody,
- studovat jejich konvergenci na příkladech
- a sepsat příslušnou matematickou teorii.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri - Numerical Mathematics. Springer, 2007.
[2] M. Bailová - Gaussovy kvadratury. Bakalářská práce, VŠB-TU Ostrava, 2013.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. Ing. Dalibor Lukáš, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2017

Datum odevzdání: 30.04.2018



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární
prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 30. dubna 2018

..........

Souhlasím se zveřejněním této bakalářské práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 Studijního a zkušebního řádu pro studium v bakalářských programech VŠB-TU Ostrava.

V Ostravě 30. dubna 2018

.....

Rád bych na tomto místě poděkoval zejména panu doc. Ing. Daliboru Lukášovi, Ph.D. nejen za přínosné rady a veškerý věnovaný čas, ale také za ochotu a pevnou dávku trpělivosti, kterou se mnou měl, při psaní mé práce. Dále bych chtěl poděkovat rodičům a blízkým, kteří při mě stáli po celou dobu psaní práce.

Abstrakt

Metody numerické integrace jsou založeny na nahrazení integrandu jeho polynomiální interpolací. Pro hladké funkce závisí efektivita metody pouze na volbě interpolačních tj. kvadraturních uzlů, jejichž počet nazýváme řádem kvadratury. Podíváme se nejen na Lagrangeův interpolační polynom, ale také na samotný systém ortogonálních polynomů, zejména na Legendrovy polynomy. Jakmile se sestavíme Newton-Cotesovu a Gauss-Legendrovu kvadraturu. Tak je porovnáme z hlediska konvergence a stability.

Klíčová slova: integrace, ortogonální systém polynomů, Lagrangeův interpolační polynom, Legendrovy polynomy, Newton-Cotesova kvadratura, Gauss-Legendrova kvadratura

Abstract

Numerical integration methods are based on replacing the integral with its polynomial interpolation. For smooth functions, the efficiency of the method depends only on the choice of interpolation, ie the quadrature nodes, with the number which we call the quadrature order. We will look not only at the Lagrange interpolation polynomial, but also on the system of orthogonal polynomials, especially on the Legendrous polynomials. Once we compile the Newton-Cotes and Gauss-Legendre quadrature. So we compare them in terms of convergence and stability.

Key Words: intergraction, system of orthogonal polynomials, Lagrange interpolation polynomial, Legendrous polynomials, Newton-Cotes quadrature, Gauss-Legendre quadrature

Obsah

Seznam obrázků	8
Seznam tabulek	9
1 Úvod	10
2 Newtonova-Cotesova kvadratura	11
2.1 Lagrangeova interpolace	11
2.2 Newton-Cotesova kvadratura	15
2.3 Citlivost kvadratury ke změně bodů	18
3 Gaussova kvadratura	21
3.1 Ortogonální polynomy	22
3.1.1 Legendrovy polynomy	23
3.1.2 Hermitovy polynomy	24
3.1.3 Laguerrovy polynomy	25
3.1.4 Čebyševovy polynomy	26
3.2 Gaussova - Legendrova kvadratura	27
4 Porovnání Newton-Cotesovy a Gauss-Legendrovy metody	29
4.1 Porovnání konvergence	29
4.2 Porovnání stability	32
5 Závěr	35
6 Literatura	36
Literatura	36

Seznam obrázků

1	Lagrangeova interpolace	14
2	Obdélníkové pravidlo	15
3	Lichoběžníkové pravidlo	16
4	Simsonovo pravidlo	16
5	$\exp(x)$ na $n=8$	19
6	$\frac{1}{1+x^2}$ na $n=8$	20
7	Legendrovy polynomy	23
8	Hermitovy polynomy	24
9	Laguerrovy polynomy	25
10	Čebyševovy polynomy	26
11	Konvergence $\sin(x)$, $n = 8$	30
12	Konvergence $\exp(x)$, $n = 8$	30
13	Konvergence $\cos(x)$, $n = 8$	31
14	Konvergence Rungeho funkce, $n = 8$	31
15	Stabilita $\sin(x)$, $n = 8$	33
16	Stabilita $\exp(x)$, $n = 8$	33
17	Stabilita $\cos(x)$, $n = 8$	34
18	Stabilita Rungeho funkce, $n = 8$	34

Seznam tabulek

1	Chyba Gaussovy - Legendrovy kvadratury	28
---	--	----

1 Úvod

Metody numerické integrace jsou založeny na nahrazení integrandu jeho polynomiální interpolací. Pro hladké funkce závisí efektivita metody pouze na volbě interpolačních tj. kvadraturních uzlů. Jejich počet nazýváme řádem kvadratury. Newtonova kvadratura volí uzly na ekvidistantní síti. Je však numericky méně stabilní. Pro dosažení konvergence se používá složená Newtonova kvadratura. Gaussova kvadratura volí body tak, aby byl výpočet numericky stabilní, a proto je možné ji používat přímo.

Struktura této práce je následující. V první části se podíváme na Newton-Cotesovu kvadraturu. Řekneme si něco o Lagrangeovém interpolačním polynomu a o jeho chybě. Následně se podíváme na citlivost kvadratury. Ve druhé části se podíváme na systém ortogonálních polynomů a na některé typy polynomů. Zejména se podíváme na Legendrovy polynomy. V poslední části porovnáme Newton-Cotesovu kvadraturu a Gauss-Legendrovu kvadraturu z pohledu konvergence a stability.

2 Newtonova-Cotesova kvadratura

V numerických metodách jsou vzorce Newton-Cotes, také nazývány jako Newton-Cotesova kvadratura pravidla nebo prostě jako Newton-Cotesova pravidla. Používají se pro numerický výpočet integrálů, tak že se původní integrál nahradí Lagrangeovou interpolací na vhodně zvolených bodech. Jmenují se podle Issaca Newtona a Roger Cotes.

2.1 Lagrangeova interpolace

V první řadě si musím říct, co to vůbec interpolace je. Interpolace není nic jiného než že se původní funkce nahradí novou funkcí, která je zvolena na vhodných bodech.

O hledané interpolační funkci budeme uvažovat jako o polynomu stupně n a budeme ji značit $L_n(x)$. Dále pak budeme uvažovat $n+1$ ekvidistantních uzlů interpolace x_0, \dots, x_n a taky budeme uvažovat funkční hodnoty v těchto bodech $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Kde budeme předpokládat

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

Funkci L_n pak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x),$$

kde l_i jsou polynomy stupně n , které tvoří bázi prostoru. Tuhle bázi musíme volit tak, aby se polynom nabýval hodnoty 1 pouze v jednom bodu interpolace a v ostatních uzlech nabýval hodnoty 0. Takové tvrzení můžeme zformulovat následovně.

Polynom $L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)$ nazýváme Lagrangeův interpolační polynom jestliže l_i jsou polynomy n -tého stupně, kde

$$l_i(x_k) = 0 \text{ pro } k \neq i,$$

$$l_i(x_i) = 1,$$

a jsou zadány předpisem

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)},$$

Nyní si ukážeme příklad.

Zadání: Určete hodnotu Lagrangeova interpolačního polynomu v bodě 1 pokud jsou zadány následující hodnoty

$$L_n(0) = 2,$$

$$L_n(2) = 3,$$

$$L_n(3) = -1,$$

$$L_n(4) = 1,$$

Ze zadání hned zjistíme

$$x_0 = 0,$$

$$x_1 = 2,$$

$$x_2 = 3,$$

$$x_3 = 4,$$

Jelikož máme funkci L_n zadánu pomocí čtyř bodů, tak budeme uvažovat polynom stupně $n = 3$, který má následující předpis

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^3 f(x_i)l_i(x) = 2 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + (-1) \cdot l_3(x) + 1 \cdot l_4(x), \quad (1)$$

kde jednotlivé $l_i(x)$ mají následující předpis

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{(0 - 2)(0 - 3)(0 - 4)} = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{13}{12}x + 1,$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 3)(x - 4)}{(2 - 0)(2 - 3)(2 - 4)} = \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 3x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 4)}{(3 - 0)(3 - 2)(3 - 4)} = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{8}{3}x,$$

$$l_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(4 - 0)(4 - 2)(4 - 3)} = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x,$$

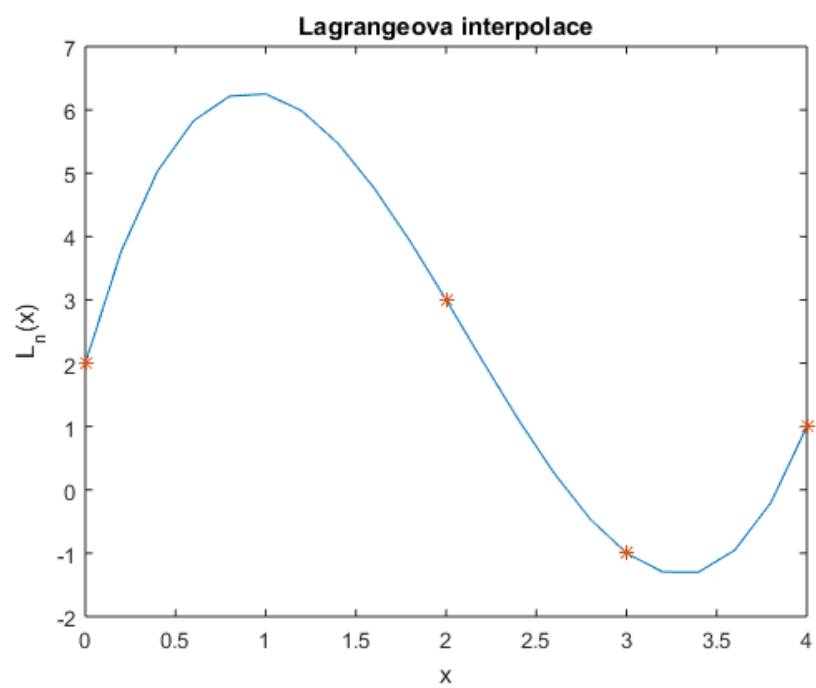
Nyní dosadíme do rovnice (1) a získáme polynom třetího stupně

$$\frac{27}{24}x^3 - \frac{55}{8}x^2 + \frac{117}{12}x + 2 \quad (2)$$

Poslední věc, co zbývá udělat, je určit hodnotu polynomu v bodě 1. Dosadíme do (2)

$$\frac{27}{24} - \frac{55}{8} + \frac{117}{12} + 2 = \frac{27 - 165 + 234 + 48}{24} = 6$$

Na obrázku je graf $L_n(x)$.



Obrázek 1: Lagrangeova interpolace

2.2 Newton-Cotesova kvadratura

Nechť je dána funkce f definována na $[a, b]$ a jsou dány body x_i , kde $i = 0, \dots, n$ a platí, že $x_0 = a$ a $x_n = b$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

kde w_i jsou váhy kvadratury.

Jak je následně patrné, tak váhy jsou jednoznačně dány z Lagrangeova interpolačního polynomu. Jsou závislé na uzlech x_i a ne na funkci f . Nechť $L(x)$ je interpolační polynom ve tvaru Lagrange pro dané body $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$, pak platí

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \right) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx$$

a tedy

$$w_i = \int_a^b l_i(x) dx$$

Body x_i si volíme na ekvidistantní síti, tzn. mezi body je vždy stejná vzdálenost.

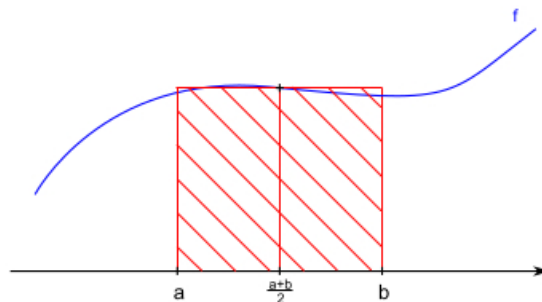
Nyní si uvedeme první tři Newton-Cotesovy vzorce.

Obdélníkové pravidlo

$$I(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + E(f)$$

Kde $E(f)$ je chyba obdélníkového pravidla

$$E(f) = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)$$



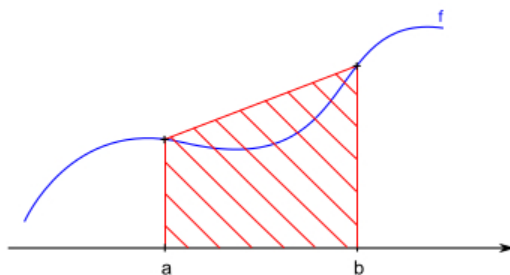
Obrázek 2: Obdélníkové pravidlo

Lichoběžníkové pravidlo

$$I(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + E(f)$$

Kde $E(f)$ je chyba lichoběžníkového pravidla

$$E(f) = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$



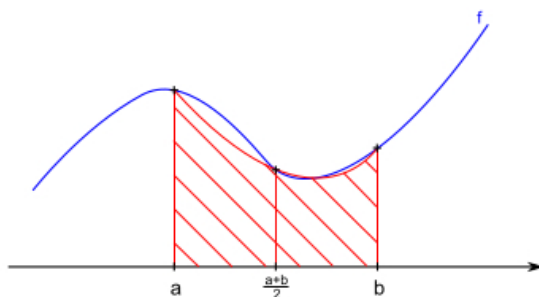
Obrázek 3: Lichoběžníkové pravidlo

Simpsonovo pravidlo

$$I(f) = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) + E(f)$$

Kde $E(f)$ je chyba Simpsonova pravidla

$$E(f) = -\frac{1}{90}(\frac{b-a}{2})^5 f^{IV}(\xi)$$



Obrázek 4: Simpsonovo pravidlo

Uvedeme si nyní na příkladu jednotlivá pravidla, když použijeme na následující zadání:

$$f = \sin(x), \quad a = 0, \quad b = \frac{3\pi}{2}, \dots \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x) dx = 1$$

Obdélníkové pravidlo

$$I(f) = (b - a) \cdot f\left(\frac{a + b}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \cdot f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

Lichoběžníkové pravidlo

$$I(f) = \frac{b - a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) = \frac{\frac{3\pi}{2}}{2} \cdot (0 + (-1)) = \frac{3\pi}{4} \cdot (-1) = -\frac{3\pi}{4}$$

Simsonovo pravidlo

$$I(f) = \frac{b - a}{6} (f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b)) = \frac{\frac{3\pi}{2}}{6} (0 + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-1)) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{4}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

2.3 Citlivost kvadratury ke změně bodů

V téhle kapitole se podíváme, jak je kvadratura citlivá vzhledem ke změně bodů.

Zavedeme si následující značení $Q_{NC}^{(n)}(f)$, kde spodní index NC značí, že se jedná o Newton-Cotese a horní index n znamená, že je závislé na n .

$$Q_{NC}^{(n)}(f) = \sum_{i=0}^n w_i^{(n)} \cdot f(x_i^{(n)}),$$

kde

$$x_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{a+b}{2} & \text{pokud } n = 0 \\ a + i \cdot \frac{b-a}{n} & \text{pokud } n \geq 1 \end{cases}$$

a

$$w_i^{(n)} = \int_a^b l_i^{(n)}(x) dx$$

zde $l_i^{(n)}$ značí Lagrangeovu interpolaci, kterou lze zapsat jako

$$l_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Citlivost vzhledem k bodům se dá tedy napsat následovně:

$$\frac{\partial Q^{(n)}}{\partial x_i}(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{\partial w_k^{(n)}}{\partial x_i}(x_0, \dots, x_n) \cdot f(x_k^{(n)}) \right) + w_i^{(n)} \cdot f'(x_i^{(n)})$$

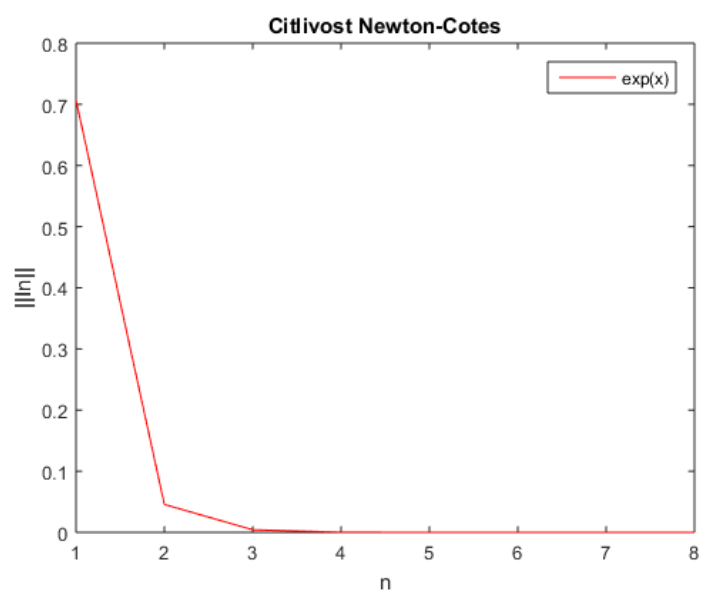
kde

$$\frac{\partial w_k^{(n)}}{\partial x_i} = \int_a^b \frac{\partial w_k^{(n)}}{\partial x_i} \left[\frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \right] \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) dx$$

Numericky to můžeme napsat ve tvaru:

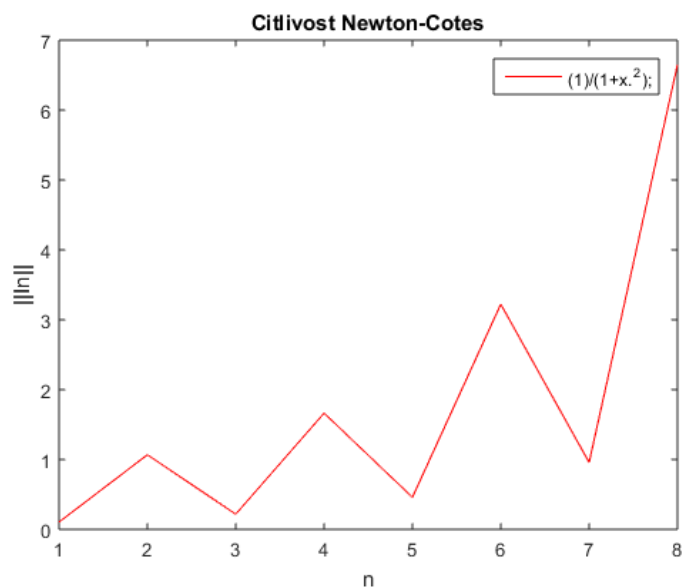
$$\frac{\partial Q^{(n)}}{\partial x_i} \approx \frac{Q^{(n)}(x_0, \dots, x_i + h, \dots, x_0) - Q^{(n)}(x_0, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

Na následujících obrázcích jde vidět, jak je Newton-Cotes citlivý na jednotlivých n bodech. Nejdříve budeme uvažovat $f = \exp(x)$ na intervalu $< 0, 1 >$.



Obrázek 5: $\exp(x)$ na $n=8$

Druhá funkce bude vypadat následovně $f = \frac{1}{1+x^2}$ a tentokrát bude na intervalu $< -5, 5 >$.



Obrázek 6: $\frac{1}{1+x^2}$ na $n=8$

Zde můžeme vidět, že Newton-Cotes už je citlivější, pokud zadáme větší hodnotu n , než je tomu u funkce $f = \exp(x)$.

3 Gaussova kvadratura

Jak jsme viděli u (obrázku č.8) tak Newton-Cotesova kvadratura už nebyla tak přesná, jak bychom si představovali. Už bylo vidět, že je citlivá a tím bychom nedostali výsledek, který by nám vyhovoval. Nyní se podíváme na Gausovu kvadraturu, která by měla být přesnější než Newton-Cotesova kvadratura a měla by být vhodnější na složitější funkce.

Budeme uvažovat integrál

$$I = \int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n w_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$$

kde, w je tzv. váhová funkce, která bude zachycovat singularitu

$$w(x) \in C((a, b)), \quad w(x) > 0, \quad \int_a^b w(x)dx < \infty$$

Nyní nebudeme volit body x_i na ekvidistantní síti, ale budou závislé na váhové funkci w , stejně jako koeficienty w_i . Abychom byli přesní, tak na jednotlivé uzlové body použijeme kořeny polynomů, které jsou ortogonální s váhovou w na $< a, b >$. Výhodou je, že udávají přesnější výsledky než Newton-Cotesova kvadratura.

Dále vezmeme v potaz

$$(f, g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx \tag{3}$$

zde (f, g) udávají skalární součin na $C(< a, b >)$.

Ukážeme si, že (f, g) je skalárním součinem na $C(< a, b >)$, neboť jsou splněny následující podmínky:

- 1) $(f, g) = (g, f)$
- 2) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$
- 3) $(f, f) \in \mathbb{R}, (f, f) \geq 0$
- 4) $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Důkaz:

- 1) $(f, g) = \int_a^b r(x)f(x)g(x)dx = \int_a^b \overline{r(x)g(x)f(x)}dx = \overline{(g, f)}, r = \bar{r}$
- 2) Je zřejmé už z předpisu
- 3) $(f, f) = \int_a^b r(x)|f(x)|^2dx > 0, \text{ kde } r(x), f(x) \geq 0$
- 4) $0 = (f, f) = \int_a^b r(x)|f(x)|^2dx \Rightarrow f(x) = 0, \text{ kde } r(x) > 0$

3.1 Ortogonální polynomy

Budeme uvažovat výchozí polynom stupně n , který je ve tvaru

$$Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Budeme-li uvažovat $a_n = 1$, tak budeme označovat polynom jako normovaný, který má následující tvar

$$P_n(x) = \frac{Q_n(x)}{a_n} = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}$$

Ortogonální systém polynomů si tedy můžeme definovat následovně:

Systém polynomů $Q_n(x), n \in \mathbb{N}$ je ortogonálním systémem vzhledem k váhové funkci w , kde $w > 0$, jestliže pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ bude platit

$$\int_I Q_n(x) Q_m(x) w(x) dx = \gamma_n \delta_{mn}$$

kde

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } m \neq n \\ 1 & \text{pokud } m = n \end{cases} \quad \text{Vzhledem k (3)}$$

Tří-členný rekurentní vztah

Je dobře známo, že všechny ortogonální systémy polynomů splňují tzv. tří-členný rekurentní vztah

$$Q_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) Q_n(x) - \beta_n Q_{n-1}(x), \quad n \geq 0$$

kde

$$\alpha_n = \frac{(x Q_n, Q_n)}{(Q_n, Q_n)}, \quad \beta_{n+1} = \frac{(x Q_n, Q_{n-1})}{(Q_{n-1}, Q_{n-1})}, \quad n \geq 0$$

Příklady:

$w(x) = 1$: Legendrovy polynomy, $I :=]-1, 1[$

$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$: Hermitovy polynomy, $I := \mathbb{R}$

$w(x) = e^{-x} x^\alpha$: Laguerrovy polynomy, $I :=]0, \infty[$

$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: Čebyševovy polynomy, $I :=]-1, 1[$

3.1.1 Legendrovy polynomy

Nyní se podíváme na první z polynomů a tím budou Legendrovy polynomy. U Legendrových polynomů platí: $a = -1$, $b = 1$, $w(x) = 1$.

Jejich rekurentní vztah můžeme napsat jako

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

kde

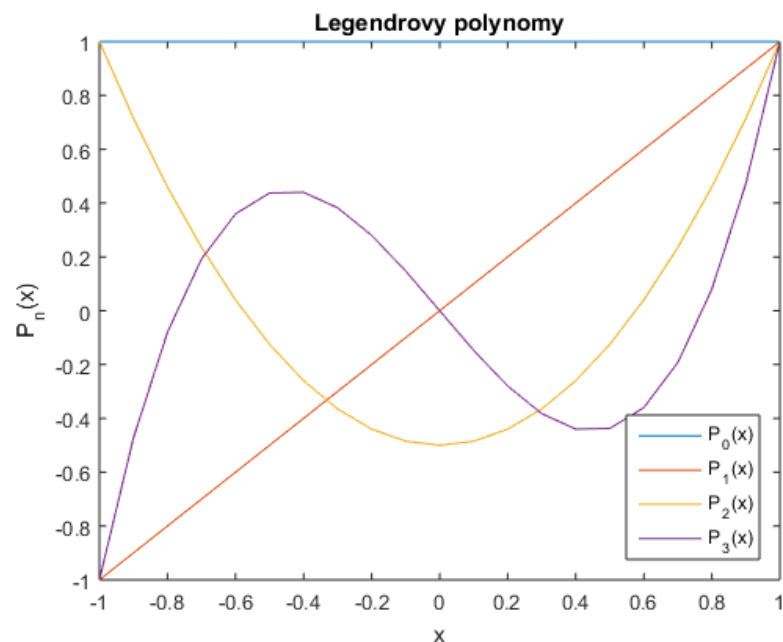
$$n > 0$$

Legendrovy polynomy tvoří ortogonální systém polynomů s váhovou funkcí $w(x) = 1$. Díky váhové funkci, můžeme jejich tvar napsat jako

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

Nyní si uvedeme prvních pár Legendrových polynomů

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$



Obrázek 7: Legendrovy polynomy

3.1.2 Hermitovy polynomy

Druhý typ polynomů, na který se podíváme jsou Hermitovy polynomy. Pro Hermitovy polynomy platí: $a = -\infty$, $b = \infty$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Jejich rekurentní vztah můžeme napsat jako.

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$$

kde

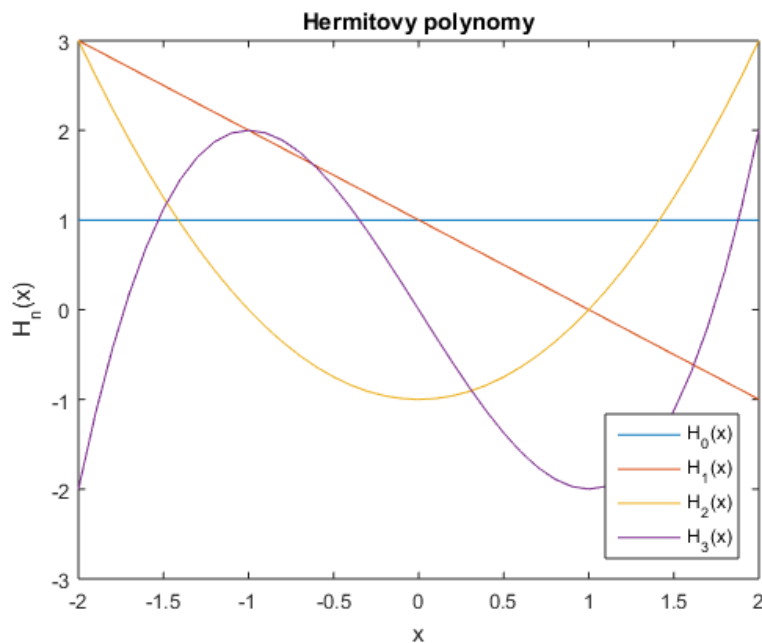
$$n > 0$$

Hermitovy polynomy tvoří ortogonální systém polynomů s váhovou funkcí $w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Díky váhové funkci, můžeme jejich tvar napsat jako.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)w(x)dx = n!\delta_{mn}$$

Díky rekurentnímu vztahu si můžeme vyjádřit prvních pár Hermitových polynomů.

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1 \quad H_3(x) = x^3 - 3x$$



Obrázek 8: Hermitovy polynomy

3.1.3 Laguerrovy polynomy

Předposledním typem polynomů, na který se podíváme jsou Laguerrovy polynomy. Pro Laguerrovy polynomy platí: $a = 0$, $b = \infty$, $w(x) = e^{-x}x^\alpha$.

Jejich rekurentní vztah můžeme napsat jako.

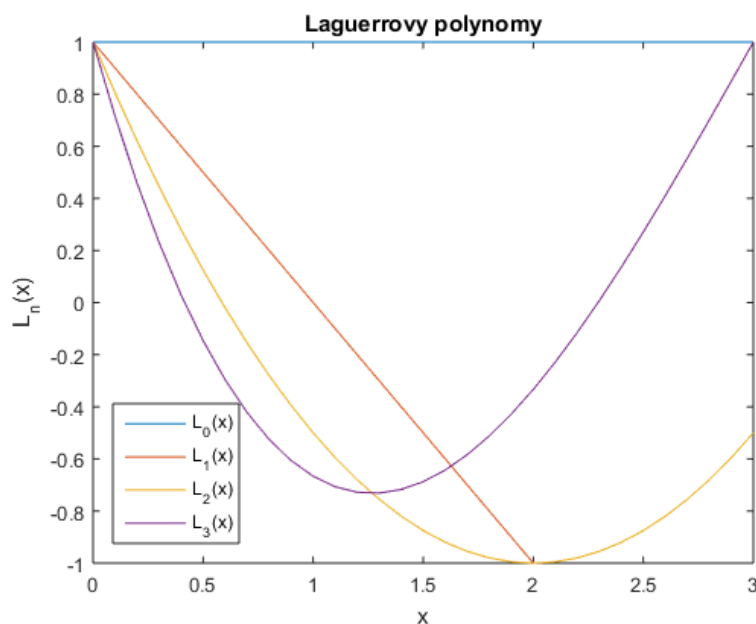
$$L_{n+1} - (2n + 1 - x)L_n + n^2L_{n-1} = 0$$

Laguerrovy polynomy tvoří ortogonální systém polynomů s váhovou funkcí $w(x) = e^{-x}x^\alpha$. Díky váhové funkci, můžeme jejich tvar napsat jako.

$$\int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)w(x)dx = \frac{\tau(n + \alpha + 1)}{n!}\delta_{m,n}$$

Díky rekurentnímu vztahu si můžeme vyjádřit prvních pár Laguerrových polynomů.

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \quad L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$$



Obrázek 9: Laguerrovy polynomy

3.1.4 Čebyševovy polynomy

Posledním typem polynomů, na které se podíváme jsou Čebyševovy polynomy. Pro Čebyševovy polynomy platí: $a = -1$, $b = 1$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Jejich rekurentní vztah můžeme napsat následovně

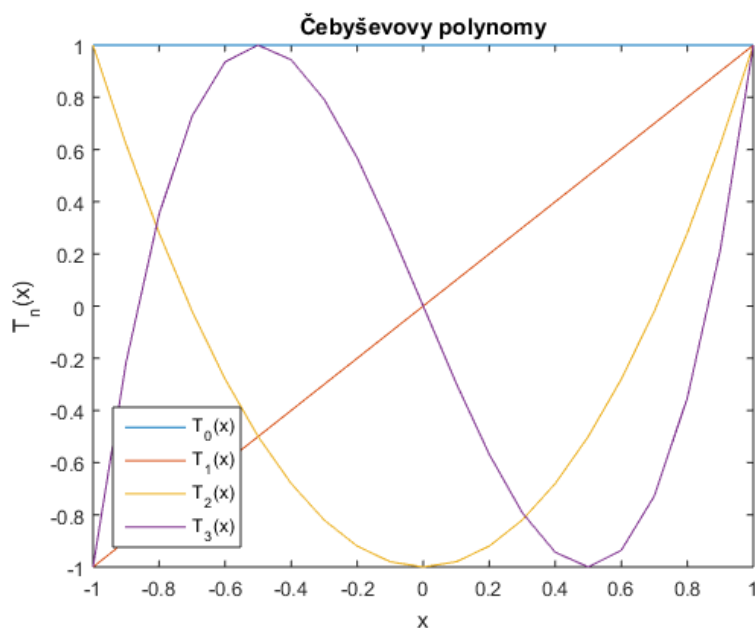
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Čebyševovy polynomy tvoří ortogonální systém polynomů s váhovou funkcí $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Díky váhové funkci, můžeme jejich tvar napsat jako.

$$\int_{-1}^1 w(x)f(x)g(x)dx$$

Díky rekurentnímu vztahu si můžeme vyjádřit prvních pár Čebyševových polynomů.

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x$$



Obrázek 10: Čebyševovy polynomy

3.2 Gaussova - Legendrova kvadratura

Budeme integrovat funkci $f(x)$ na intervalu $< -1, 1 >$. Váhová funkce bude mít tvar $w(x) = 1$ pro všechna x u intervalu $< -1, 1 >$.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

Abychom mohli provádět výpočty, tak je nutné najít ortogonální polynomy s váhovou funkcí $w(x) = 1$ na $< -1, 1 >$. Polynomy, které nám splňují tuhle podmínku jsou právě Legendrovy polynomy. Za uzly x_i , kde $i = 0, \dots, n$ budeme volit kořeny Legendrových polynomů P_n . Váhy w_i budeme tedy počítat pomocí následujícího vztahu

$$w_i = \frac{2(1 - x_i^2)}{n^2(P_{n-1}(x_i))^2} \quad (4)$$

kde

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Pokud se $i = 0$, tak pro výpočet w_i použijeme následující vztah

$$\frac{2}{(1 - x_i^2)(P'_n(x_i))^2}$$

Příklad: Nyní si ukážeme příklad výpočtu pomocí Gaussovy - Legendrovy kvadratury. Budeme uvažovat integrál $\int_{-1}^1 e^{\sin(x)} dx$.

Pokud budeme chtít použít pro výpočet Gaussovu - Legendrovu kvadraturu, tak budeme pro výpočet uvažovat následující vztah

$$\int_{-1}^1 e^{\sin(x)} dx \doteq \sum_{k=0}^{n-1} w_k^{GL} \cdot e^{\sin(x)_k^{GK}}$$

kde za x budeme volit kořeny Legendrových polynomů a váhy w_i budeme počítat ze vztahu (4).

Abychom zjistili rozdíl ve výpočtu, tak použijeme následující vztah $|I_n - I|$, kde

$$\int_{-1}^1 e^{\sin(x)} dx \approx 2,28319452091^1 \quad (5)$$

¹přibližnou hodnotu integrálu (5) jsme vypočítali pomocí programu *MATLAB*, zobrazujeme platné číslice.

n	1	2	3	4	5	6
$ I_n - I $	0,2832	0,0222	0,00015	0,000042	0,0000021	0,00000032

Tabulka 1: Chyba Gaussovy - Legendrovy kvadratury

V tabulce si můžeme všimnout, že s každým dalším stupněm klesne chyba alespoň o řád.

4 Porovnání Newton-Cotesovy a Gauss-Legendrovy metody

V téhle kapitole se podíváme na dvě porovnání Newton-Cotesovy a Gauss-Legendrovy metod. Nejdříve se podíváme na konvergenci a na konec se podíváme na porovnání stability uvedených metod.

4.1 Porovnání konvergence

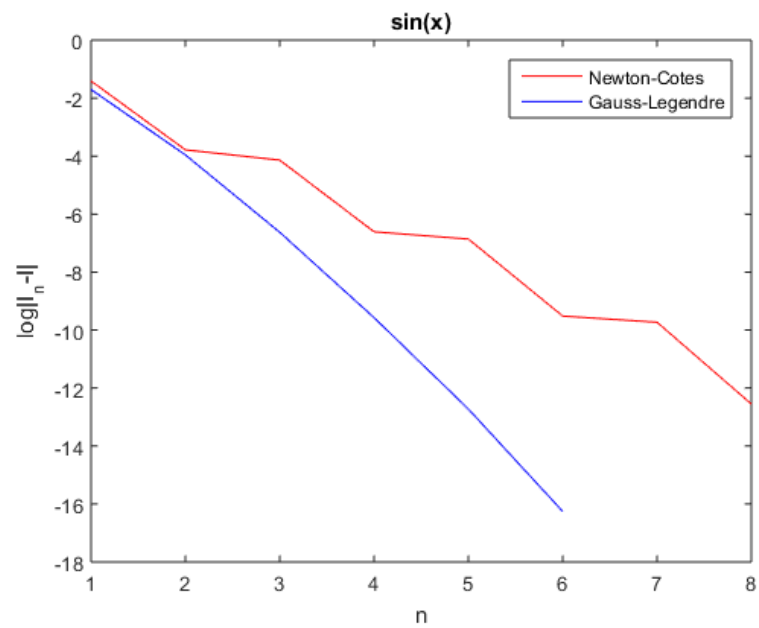
Pro porovnání budeme uvažovat následující funkce $\sin(x)$, e^x , $\cos(x)$, všechny funkce budou na intervalu $< 0, 1 >$ a podíváme se také na Rungeho funkci $\frac{1}{1+x^2}$ na intervalu $< -5, 5 >$.

kde

$$n = 8$$

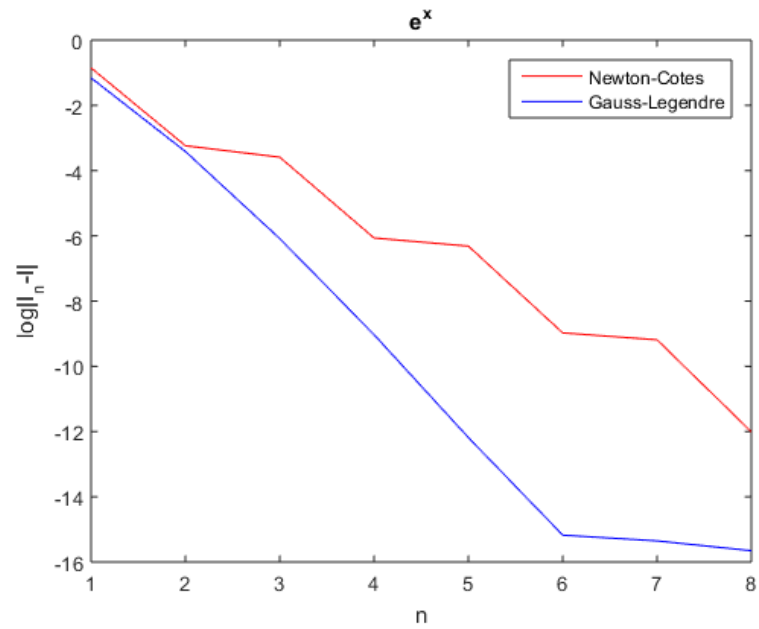
Na obrázcích níže si můžeme všimnout, že Gauss-Legendrovy metody vždy konvergují lépe. Zkoušel jsem zvolit i $n = 18$ a tam už se Newton-Cotes pomalu ani nevykreslil. Můžeme tedy říci, že si u integrace polynomu stupně n vystačíme u Gauss-Legendra s polovinou bodů.

$\sin(x)$, $n=8$



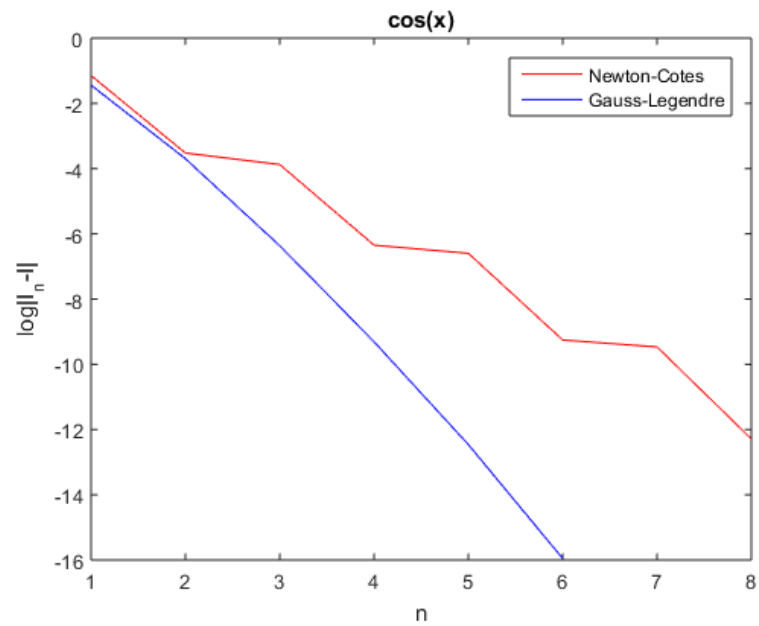
Obrázek 11: Konvergence $\sin(x)$, $n = 8$

$\exp(x)$, $n=8$



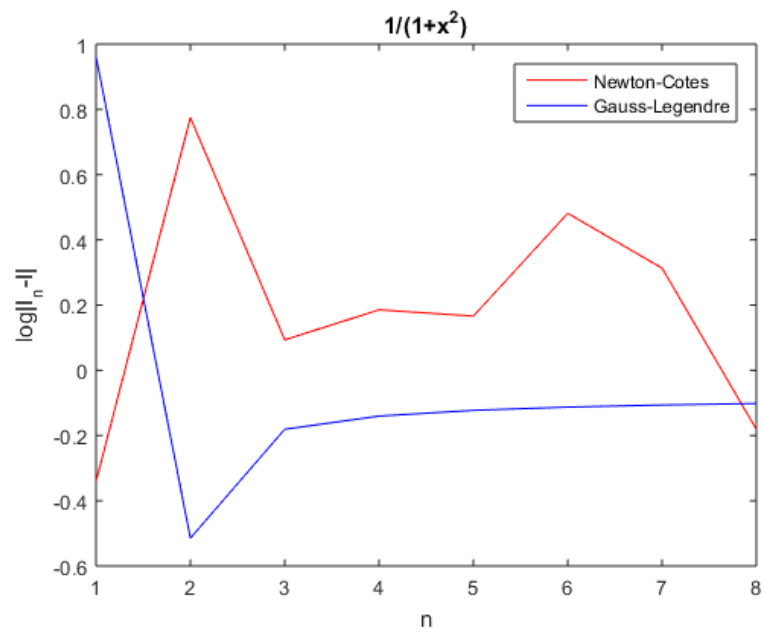
Obrázek 12: Konvergence $\exp(x)$, $n = 8$

$\cos(x)$, $n=8$



Obrázek 13: Konvergence $\cos(x)$, $n = 8$

Rungeho funkce, $n=8$



Obrázek 14: Konvergence Rungeho funkce, $n = 8$

4.2 Porovnání stability

Pro porovnání budeme opět uvažovat stejné funkce jako v kapitole 4.1.

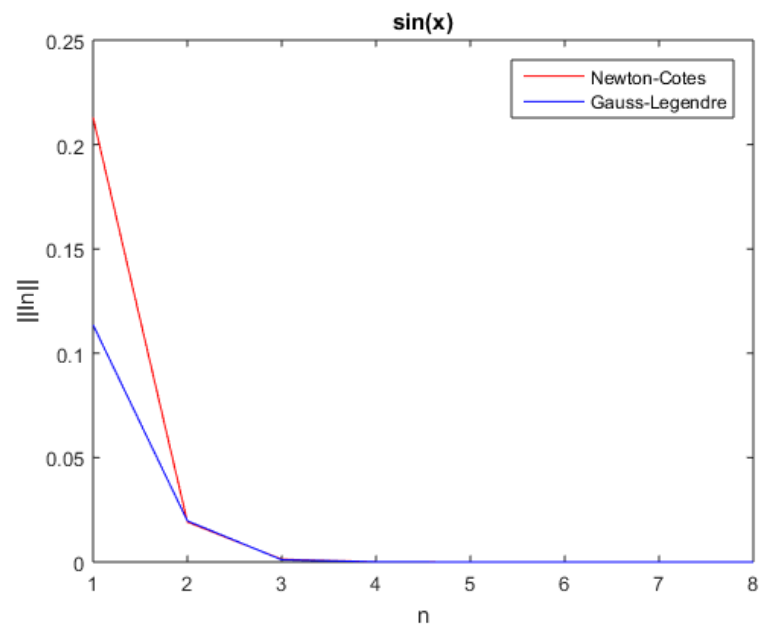
Tedy $\sin(x)$, e^x , $\cos(x)$ na intervalu $< 0, 1 >$ a Rungeho funkci na $< -5, 5 >$.

kde

$$n = 8$$

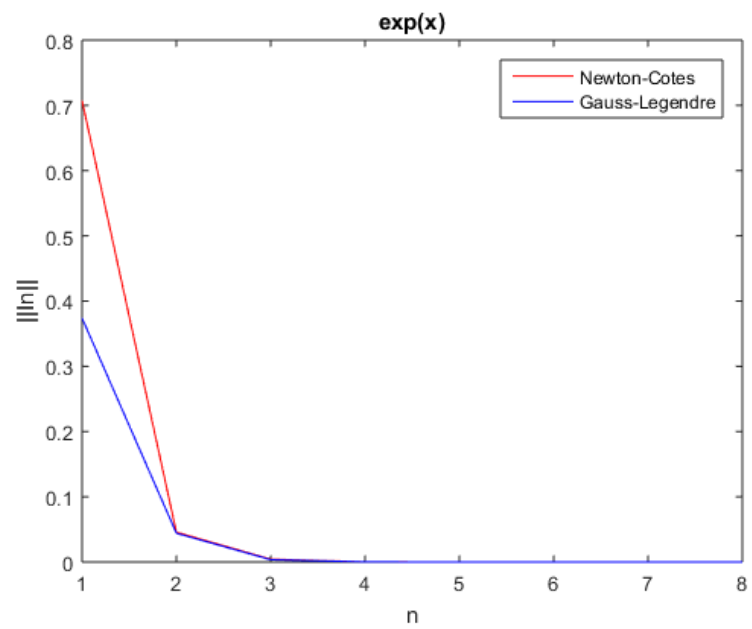
Na obrázcích níže si můžeme všimnout, že Gauss-Legendrovy metodymají vždy lepší stabilitu.

$\sin(x)$, $n=8$



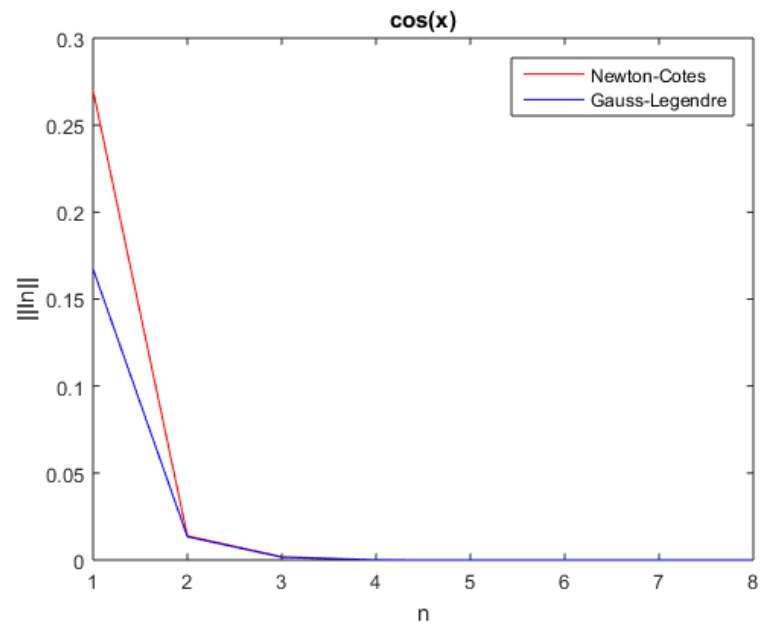
Obrázek 15: Stabilita $\sin(x)$, $n = 8$

$\exp(x)$, $n=8$



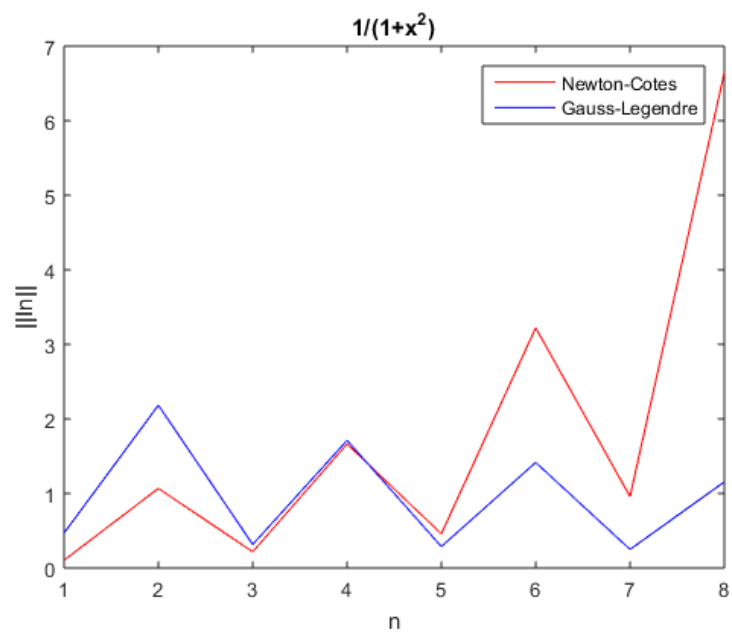
Obrázek 16: Stabilita $\exp(x)$, $n = 8$

$\cos(x)$, $n=8$



Obrázek 17: Stabilita $\cos(x)$, $n = 8$

Rungeho funkce, $n=8$



Obrázek 18: Stabilita Rungeho funkce, $n = 8$

5 Závěr

Při psaní své bakalářské práce jsem si osvojil znalosti, které se týkají základních poznatků v numerických metodách, jako je například Lagrangeův interpolační polynom a ortogonální systém polynomů. V první části své bakalářské práce jsem musel pochopit princip Lagrangeova interpolačního polynomu, zejména výpočet vah, které byly nezbytné pro použití Newton-Cotesových vzorců. V druhé části jsem se věnoval ortogonálním polynomům, zejména Legendrovým. Při samotném porovnání Newton-Cotese a Gauss-Legendra jsem zjistil, že Gauss-Legendre je pro výpočty lepší, protože je stabilnější a lépe konverguje. Je to zejména proto, že jsme body x_i nevolili na ekvidistantní síti, ale byly závislé na váhové funkci w . Celá práce pro mě měla velký přínos, protože jsem dokázal nejen pochopit obě výše zmíněné metody, ale také samotný princip numerických metod.

6 Literatura

Literatura

- [1] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri: *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag New York, INC. [2000]
- [2] Xiu Dongbin: *Numerical methods for stochastic computations: a spectral method approach*. Princeton University Press, [2010].
- [3] Vít Vondrák, Lukáš Pospíšil: *Numerické metody 1* [2011]
http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf.
- [4] Vratislava Mošová: *Numerické metody* []
<http://physics.ujep.cz/~jskvor/NME/DalsiSkripta/numericke metody.pdf>.